



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Titre :** Groupes de frise des répétitions des carquois de type Dynkin

**Auteur(s) :** David Boulet-St-Jacques, Myriam Chabot et Guillaume Douville

**Revue :** CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

**Volume :** 3

**Année :** 2012

**Pages :** 39-53

**Éditeur :** Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

**URI :** Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

*Page vide laissée intentionnellement*

# GROUPES DE FRISE DES RÉPÉTITIONS DES CARQUOIS DE TYPE DYNKIN

DAVID BOULET-ST-JACQUES, MYRIAM CHABOT ET GUILLAUME  
DOUVILLE

**RÉSUMÉ** La répétition d'un carquois  $Q$  consiste en un carquois infini, fait de copies de  $Q$  indexées par les entiers et reliées entre elles par des flèches supplémentaires. Dans cet article, on classe les répétitions des carquois de type Dynkin selon leur groupe de symétrie.

## 1 Introduction

Les **frises** sont des bandes sur lesquelles se répète de manière périodique un motif. Plusieurs mathématiciens, par exemple Bravais, ont étudié les frises en tant qu'objets mathématiques [RSA08]. En effet, leur étude a permis, grâce à la théorie des groupes des isométries du plan, de classer les frises en sept classes, chacune identifiée par l'action d'un groupe. Un tel groupe s'appelle **groupe de frise**. Il est notamment possible de créer des frises à partir d'un carquois  $Q$  fini et acyclique, et ce, en construisant la répétition  $\mathbb{Z}Q$  de ce carquois. On obtient une bande infinie et périodique que l'on peut classer dans l'un des sept groupes de frise existants. En particulier, dans la théorie des algèbres amassées introduites au début du 21<sup>e</sup> siècle par Fomin-Zelevinsky ([FZ02], [FZ03]), on s'intéresse particulièrement aux carquois de type Dynkin, en lien avec les algèbres amassées de type fini. Christine Riedtmann a d'ailleurs présenté une classification des automorphismes des répétitions de carquois de type Dynkin [Rie80]. Cet article propose une classification des répétitions associées aux carquois de type Dynkin parmi les sept groupes de frise. Pour ce faire, nous introduirons d'abord des notions élémentaires liées aux répétitions de carquois de type Dynkin, pour ensuite présenter les sept groupes de frise. Finalement, nous procéderons à la classification des répétitions de carquois de type Dynkin.

## 2 Éléments de base

On rappelle qu'un **carquois** est un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$  où  $Q_0$ , est l'ensemble des sommets,  $Q_1$  est l'ensemble des flèches, et  $s$  et  $b$  sont des fonctions

---

Les auteurs souhaitent remercier le LaCIM, l'ISM et le CRSNG pour leur financement respectif. De plus, les auteurs souhaitent remercier Ibrahim Assem pour la supervision de cet article.

**Définition 2.1.** Un carquois est dit de type **Dynkin** si son graphe sous-jacent est de l'un des types suivants :

$$\mathbb{E}_8: \quad \begin{array}{ccccccc} & & 4 & & & & \\ & & | & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 5 & - & 6 & - & 7 & - & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{\mathbb A}_n : \\ \vec{\mathbb D}_m : \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n \\ \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow (m-2) \begin{matrix} \nearrow (m-1) \\ \searrow m \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{\mathbb{E}}_6 : \\ \qquad\qquad\qquad 4 \\ \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \\ \vec{\mathbb{E}}_7 : \\ \qquad\qquad\qquad 4 \\ \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \\ \vec{\mathbb{E}}_8 : \\ \qquad\qquad\qquad 4 \\ \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \end{array}$$

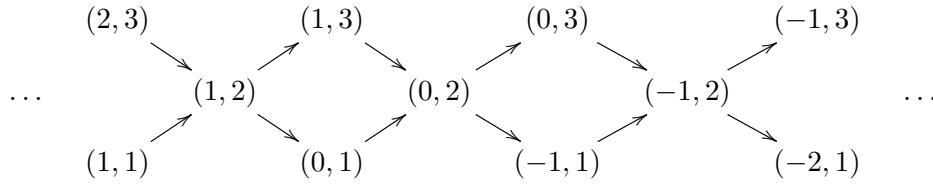
Pour un carquois de type  $\mathbb{A}_n$ , on remarque que l'orientation principale est linéaire.

À partir d'un carquois  $Q$ , nous pouvons construire sa répétition  $\mathbb{Z}Q$ .

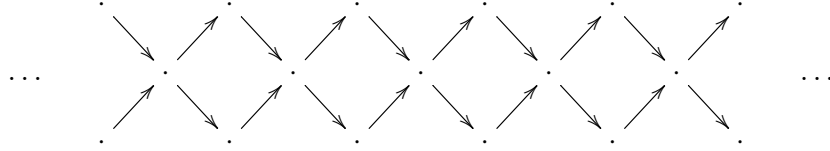
**Définition 2.2.** Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. La **répétition** de  $Q$  est le carquois infini  $\mathbb{Z}Q$  tel que

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}Q)_0 &= \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, i) \mid n \in \mathbb{Z}, i \in Q_0\} \\ (\mathbb{Z}Q)_1 &= \{(n, \alpha) : (n, i) \rightarrow (n, j) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : i \rightarrow j\} \cup \\ &\quad \{(n, \alpha') : (n, j) \rightarrow (n-1, i) \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.** Considérons le carquois  $\vec{\mathbb{A}}_3$ . Alors la répétition  $\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_3$  est :



Ainsi, nous obtenons le carquois suivant :



### 3 Classification des frises

#### 3.1 Définitions initiales

Le but de cette section est de présenter le théorème de classification des groupes de frise, ce qui mènera à une classification des répétitions  $\mathbb{Z}Q$  parmi ces groupes. Pour arriver à ce théorème, on propose de définir la notion de frise, puis de trouver l'ensemble des isométries laissant une frise invariante, appelé groupe des isométries de la frise, en passant par le groupe des isométries du plan.

**Définition 3.1.** Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , une **isométrie** est une fonction  $f : E \rightarrow E$  qui préserve les distances, c'est-à-dire que pour tous points  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  appartenant à  $E$ , on a :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)).$$

**Exemple 3.2.** Soit  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La translation horizontale  $t_L$  est une isométrie définie comme suit

$$\begin{aligned} t_L : \mathbb{R} \times [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1] \\ (x, y) &\longmapsto (x + L, y) \end{aligned}$$

**Définition 3.3.** Une **frise**  $\mathcal{F}$  est un ensemble de points inscrits dans un sous-ensemble de hauteur fixe et de largeur infinie  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  tel qu'il existe une longueur minimale non nulle  $L$  avec la propriété que l'isométrie  $t_L$  applique  $\mathcal{F}$  sur elle-même.

On rappelle que la **distance euclidienne** entre deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  du plan  $\mathbb{R}^2$  est

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Définition 3.4.** Une **isométrie de frise** ou **symétrie de frise**  $S$  est une isométrie qui envoie une frise sur elle-même.

$$\begin{aligned} S : \quad \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ (x, y) &\longmapsto S(x, y) \end{aligned}$$

### 3.2 Isométries du plan et limitations pour la frise

Nous en venons à étudier un groupe d'isométries plus général, celui des isométries du plan. Nous restreindrons ce groupe à celui des isométries de frise en utilisant la hauteur finie d'une frise.

**Théorème de classification des isométries du plan.** *Toute isométrie du plan  $\mathbb{R}^2$  est l'une des suivantes : Identité, translation, rotation, réflexion ou symétrie glissée. De plus, l'ensemble des isométries du plan forme un groupe pour la composition usuelle.*  $\square$

On réfère le lecteur à [And95] pour une preuve de cette classification.

L'ensemble des isométries de frise possibles est le groupe des isométries du plan  $\mathbb{R}^2$  auquel on retire toute isométrie qui n'envoie pas l'ensemble  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  sur lui-même, car si l'on n'a pas cette condition, il est impossible d'envoyer la frise sur elle-même. Voyons maintenant les symétries de frise possibles.

**Lemme 3.5.** *Soit  $\mathcal{F}$  une frise de période  $L$ . Alors, les uniques générateurs du groupe des isométries de  $\mathcal{F}$  sont :*

1. La translation  $t_L$  de longueur  $L$  le long de l'axe  $y = 0$ , dans le sens positif ;
2. La réflexion horizontale  $r_h$  par rapport à la droite  $y = 0$  ;
3. La réflexion verticale  $r_v|_{x=\frac{kL}{2}}$  d'axe  $x = \frac{kL}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ;
4. La rotation  $r_\pi = r_h r_v$  d'angle  $\pi$  autour des intersections entre l'axe  $y = 0$  et les droites  $x = \frac{kL}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ;
5. La symétrie glissée  $s_{L/2} = t_{L/2} r_h$ .

*Démonstration.* Commençons par les translations. Toute translation ayant une composante verticale est éliminée d'emblée, car l'image d'une telle translation ne sera pas dans  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ . De plus, la translation  $t_a$  est une isométrie de frise si et seulement si  $a = kL$ , puisque sinon il existe une composition  $t_{kL}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  telle que  $t_{kL}t_a = t_{a'}$  avec  $0 < a' < L$ , ce qui contredit la minimalité de  $L$ .

Puis, toute réflexion qui n'est pas d'axe  $y = 0$  ou parallèle à l'axe  $x = 0$  ne pourra avoir  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  pour image, et les réflexions verticales sont limitées aux axes  $x = \frac{kL}{2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , car la composition de  $r_v|_{x=a}$  et de  $r_v|_{x=b}$  donne  $t_{2(b-a)}$  qui doit être égale à  $t_{kL}$  pour ne pas contredire la minimalité de  $L$ . Cela donne :

$$2(b - a) = kL$$

ce qui est le cas si et seulement si

$$b - a = \frac{kL}{2}$$

On ne conserve donc que ces deux types de réflexions,  $r_h$  et  $r_v$ , respectivement.

Ensuite, seule la rotation d'angle  $\pi$  peut avoir  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  pour image.

Finalement, la symétrie glissée aura pour image  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$  si et seulement si sa composante de réflexion est  $r_h$ . De plus, comme la période  $L$  est minimale, la composante de translation doit non seulement être parallèle à  $y = 0$ , mais doit être aussi de longueur  $\frac{L}{2}$ , car sinon on obtient une contradiction à la minimalité de  $L$  en utilisant le fait que  $s_a^{-1} = r_h t_{-\frac{a}{2}}$ .  $\square$

Graphiquement, chaque isométrie peut être représentée comme l'indique la figure 10. Nous avons appliqué chaque isométrie au motif initial  $I$ . Ainsi, le triangle  $a$  est le résultat de la translation  $t_L$ ; le triangle  $b$ , celui de la rotation  $r_h$ ; le triangle  $c$ , celui de la réflexion verticale  $r_v$ ; le triangle  $d$ , celui de la rotation  $r_\pi$ ; le triangle  $e$ , celui de la symétrie glissée  $s_g$ . On remarque que les lettres servent uniquement à identifier les générateurs : elles ne font pas partie de la frise.

Pour alléger la présentation, la symétrie glissée  $s_{L/2}$  sera désormais notée  $s_g$  et  $r_v$  représentera l'ensemble des  $r_v|_{x=\frac{kL}{2}}$ .

### 3.3 Théorème de classification des groupes de frise

*Notation 3.6.* Soient  $a_1, \dots, a_n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ , des éléments d'un groupe  $G$ . Alors  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  note le sous-groupe de  $G$  engendré par ces éléments.

**Lemme 3.7.** *Soit  $\mathcal{F}$  une frise. Alors, on a que  $\langle r_h, r_v \rangle = \langle r_h, r_\pi \rangle = \langle r_v, r_\pi \rangle$ .*

*Démonstration.* Cela suit du fait que  $r_h r_v = r_\pi = r_v r_h$ .  $\square$

Nous arrivons au théorème principal de cette section. Nous avons vu que les isométries du plan forment un groupe pour la composition usuelle. Nous verrons maintenant quels sous-groupes d'isométries peuvent laisser la frise invariante. On réfère par exemple à [RSA08] pour une preuve alternative de ce théorème connu.

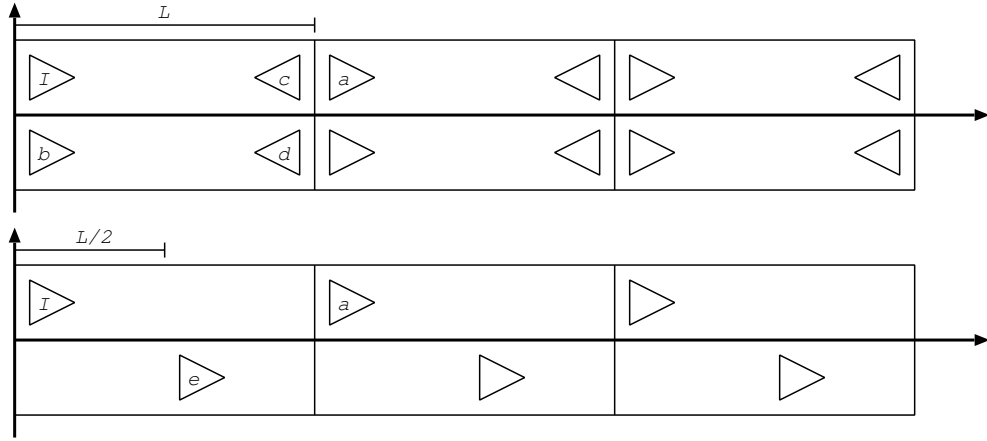


FIGURE 10 – Générateurs du groupe des isométries de frise

**Théorème de classification des groupes de frise.** *Toute frise  $\mathcal{F}$  a pour groupe de frise l'un des sept suivants :*

1.  $\langle t_L \rangle$
2.  $\langle t_L, r_v \rangle$
3.  $\langle t_L, r_h \rangle$
4.  $\langle t_L, r_\pi \rangle$
5.  $\langle s_g \rangle$
6.  $\langle s_g, r_\pi \rangle$
7.  $\langle t_L, r_h, r_v \rangle$

*Démonstration.* En vertu du théorème 3.5, nous savons que les seuls générateurs possibles sont  $t_L, r_v, r_h, r_\pi$  et  $s_g$ . Puisque, en vertu de la définition, un groupe de frise contient  $t_L$ , il reste seulement  $2^4 = 16$  ensembles de générateurs possibles. Comme on a que  $s_g^2 = t_L$ , si  $s_g$  est présent, on retire  $t_L$  pour obtenir la minimalité de l'ensemble des générateurs. De plus, en vertu du lemme 3.7, on retire 6 ensembles de générateurs qui ne sont pas uniques. Il nous reste :

1.  $\langle t_L \rangle$
2.  $\langle t_L, r_v \rangle$
3.  $\langle t_L, r_h \rangle$
4.  $\langle t_L, r_\pi \rangle$
5.  $\langle s_g \rangle$



6.  $\langle s_g, r_\pi \rangle$
7.  $\langle t_L, r_h, r_v \rangle$
8.  $\langle s_g, r_h \rangle$
9.  $\langle s_g, r_v \rangle$
10.  $\langle s_g, r_h, r_v \rangle$

Or, si  $r_h$  et  $s_g$  sont dans le même ensemble de générateurs, leur composition y est aussi, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 s_g \circ r_h &= (t_{L/2} r_h) \circ r_h \\
 &= t_{L/2} \circ (r_h^2) \\
 &= t_{L/2}
 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction à la minimalité de  $L$ . On élimine donc les cas 8 et 10 de la liste. Finalement, on a vu au théorème 3.3 qu'on peut appliquer  $r_v$  pour tout axe  $x = \frac{nL}{2}$ , ce qui implique que  $r_v$  et  $t_{L/2} r_v$  engendrent la même frise (à un changement d'origine près), et donc les cas 6 et 9 engendrent le même groupe :

$$\begin{aligned}
 \langle s_g, r_\pi \rangle &= \langle s_g, s_g r_\pi \rangle \\
 &= \langle s_g, t_{L/2} r_h \circ r_h r_v \rangle \\
 &= \langle s_g, r_v \rangle
 \end{aligned}$$

Il subsiste donc 7 groupes de frise potentiels. Les figures 11 à 17 [RSA08] montrent que ces groupes existent. En effet, chacune des figures suivantes présente des frises laissées inchangées par les isométries appartenant à l'un de ces sept groupes de frise présentés précédemment.

□

## 4 Théorème de classification des répétitions de carquois Dynkin

Telles que définies en 2.2, les flèches de  $\mathbb{Z}Q$ , pour  $Q$  fini et acyclique, n'ont pas de longueur. Or, la classification selon les groupes de frise nécessite une notion

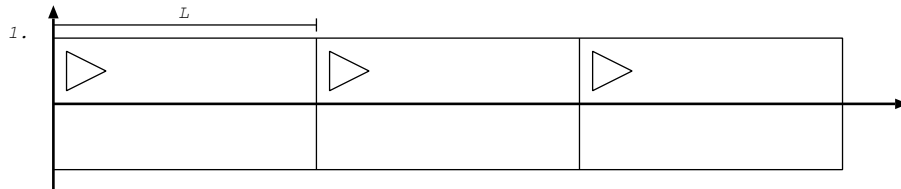
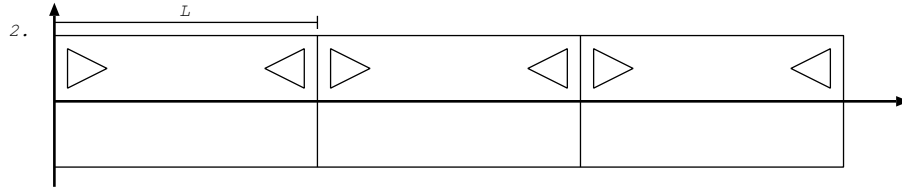
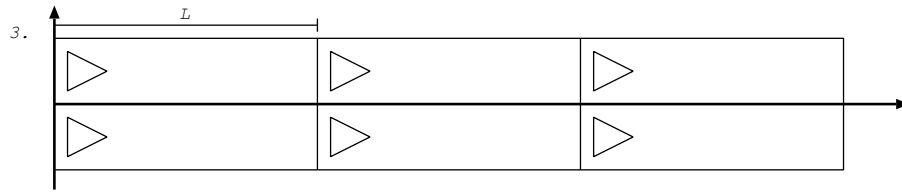
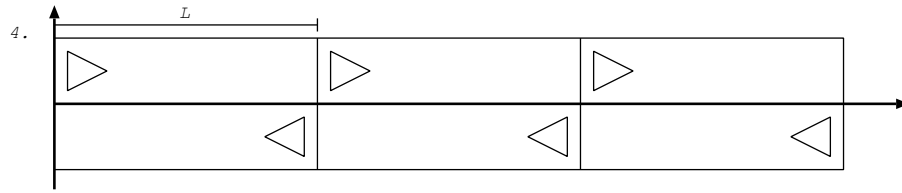
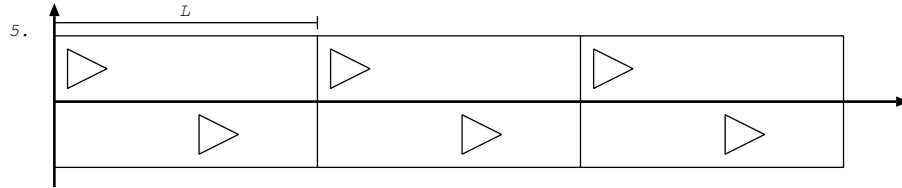
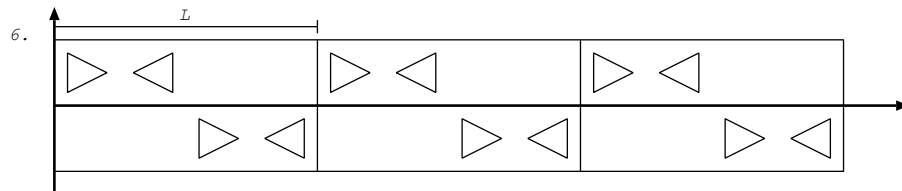
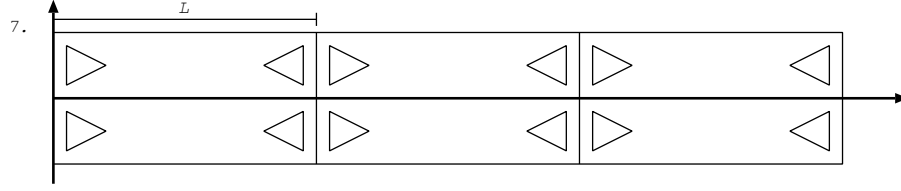


FIGURE 11 – Groupe de frise  $\langle t_L \rangle$

FIGURE 12 – Groupe de frise  $\langle t_L, r_v \rangle$ FIGURE 13 – Groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ FIGURE 14 – Groupe de frise  $\langle t_L, r_\pi \rangle$ FIGURE 15 – Groupe de frise  $\langle s_g \rangle$ FIGURE 16 – Groupe de frise  $\langle s_g, r_\pi \rangle$

FIGURE 17 – Groupe de frise  $\langle t_L, r_h, r_v \rangle$ 

de distance. Afin de pallier à ce problème, on définit la notion de distance de façon à maximiser le nombre de générateurs pour tout groupe de frise. Soit ainsi  $\lambda, \mu > 0$  deux constantes réelles.

1. La répétition doit être inscrite dans l'ensemble  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ .
2. i) Pour  $\vec{\mathbb{A}}_n$ , toutes les flèches appartenant à  $(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{A}}_n)_1$  sont de longueur  $\lambda$ .  
 ii) Pour  $\vec{\mathbb{D}}_m$ , les flèches appartenant à l'ensemble

$$A = \{(n, \alpha) : (n, m-2) \rightarrow (n, m) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : m-2 \rightarrow m\} \cup \{(n, \alpha') : (n, m) \rightarrow (n-1, m-2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

sont de longueur  $\mu$  et parallèles à l'axe des abscisses ( $y = 0$ ). Les flèches appartenant à  $(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{D}}_m)_1 \setminus A$  sont de longueur  $\lambda$ .

- iii) Pour  $\vec{\mathbb{E}}_6, \vec{\mathbb{E}}_7$  et  $\vec{\mathbb{E}}_8$ , les flèches appartenant à

$$B = \{(n, \alpha) : (n, 3) \rightarrow (n, 4) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha : 3 \rightarrow 4\} \cup \{(n, \alpha') : (n, 4) \rightarrow (n-1, 3) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

sont de longueur  $\mu$  et parallèles à l'axe des abscisses ( $y = 0$ ). Les flèches appartenant à  $(\mathbb{Z}\vec{\mathbb{E}}_p)_1 \setminus A$ ,  $p \in \{6, 7, 8\}$  sont de longueur  $\lambda$ .

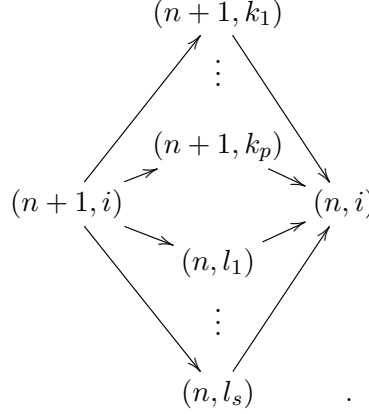
Avant d'énoncer la classification des carquois de type Dynkin selon les groupes de frise, nous présentons une propriété importante sur l'orientation initiale d'un carquois  $Q$  pour la répétition  $\mathbb{Z}Q$ .

**Proposition 4.1.** [ASS06] *Soient  $Q, Q'$  deux carquois finis et acycliques ayant le même arbre pour graphe sous-jacent. Alors  $\mathbb{Z}Q$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}Q'$ .*  $\square$

Cette proposition permet de ne considérer que le carquois principalement orienté dans la classification des frises. Le prochain lemme permet de réduire les types d'isométries possibles dans les répétitions  $\mathbb{Z}Q$  pour en venir, par la suite, à la classification des répétitions  $\mathbb{Z}Q$ , où  $Q$  est un carquois de type Dynkin, selon leur groupe de frise.

**Lemme 4.2.** *Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. Alors le groupe de frise de la répétition  $\mathbb{Z}Q$  ne peut pas contenir l'un des générateurs  $r_v$  ou  $r_\pi$ .*

*Démonstration.* Soit  $Q$  un carquois fini et acyclique. Une maille de  $\mathbb{Z}Q$  est représentée de cette manière :



Soit  $\alpha \in (\mathbb{Z}Q)_1$ , une flèche allant du sommet  $(n+1, i)$  au sommet  $(n+1, k_q)$ , où  $q \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Soient le sommet  $(n, l_r)$ , où  $r \in \{1, 2, \dots, s\}$ , l'image de la rotation appliquée au sommet  $(n+1, k_q)$ , et  $\delta \in (\mathbb{Z}Q)_1$ , une flèche allant du sommet  $(n+1, i)$  au sommet  $(n, l_r)$ . Dans le cas où le sommet  $(n, l_r)$  n'existe pas, il est trivial que la rotation  $r_\pi$  n'est pas un générateur de la répétition  $\mathbb{Z}Q$ .

Pour qu'il y ait une réflexion verticale  $r_v$  passant par le sommet  $(n+1, k_q)$ , il doit y avoir une flèche  $\beta$  allant du sommet  $(n, i)$  au sommet  $(n+1, k_q)$ . De plus, en vertu de la définition d'une répétition  $\mathbb{Z}Q$ , il y a une flèche  $\beta'$  allant du sommet  $(n+1, k_q)$  au sommet  $(n, i)$ , une contradiction, car  $\alpha$  et  $\beta'$  forment un 2-cycle et  $Q$  est acyclique.

Pour qu'il y ait une rotation  $r_\pi$  ayant pour centre de rotation le centre de la maille, il doit y avoir une flèche  $\lambda$  allant du sommet  $(n, i)$  au sommet  $(n, l_r)$ . En vertu de la définition d'une répétition, puisqu'il y a une flèche  $\gamma$  allant du sommet  $(n+1, i)$  au sommet  $(n, l_r)$ , il y a une flèche  $\gamma'$  allant du sommet  $(n, l_r)$  au sommet  $(n, i)$ , une contradiction, car  $\lambda$  et  $\gamma'$  forment un 2-cycle dans un carquois  $Q$  acyclique.  $\square$

*Remarque 4.3.* Toute répétition est nécessairement laissée invariante par la translation qui envoie la  $n^{\text{e}}$  copie du carquois vers la  $n-1^{\text{e}}$  copie. Ainsi, pour une répétition  $\mathbb{Z}Q$ , s'il n'existe aucune autre isométrie laissant la frise invariante, elle aura le groupe  $\langle t_L \rangle$  pour groupe de frise.

**Théorème 4.4.** Soit  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 4$ . Alors, on classe les répétitions de carquois Dynkin ainsi :  $\mathbb{ZD}_m$ ,  $\mathbb{ZE}_7$  et  $\mathbb{ZE}_8$  ont pour groupe de frise  $\langle t_L \rangle$ ,  $\mathbb{ZA}_{2n+1}$  et  $\mathbb{ZD}_4$  ont pour groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ , et finalement  $\mathbb{ZA}_{2n}$  et  $\mathbb{ZE}_6$  admettent  $\langle s_g \rangle$  pour groupe de frise.

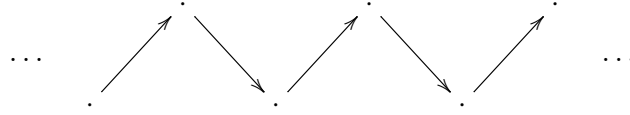
*Démonstration.* En vertu du lemme 4.2, il est impossible d'avoir une isométrie de type  $r_v$  ou  $r_\pi$ . Ainsi, toutes les répétitions ne peuvent être classifiées que dans les groupes  $\langle t_L \rangle$ ,  $\langle s_g \rangle$  ou  $\langle t_L, r_H \rangle$ . Considérons chacun des types de répétitions :

**CAS 1 : La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$** 

Soit  $\mathcal{F}$  une frise formée par la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$  dans  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ . On subdivise alors la frise sur la hauteur de telle sorte que l'on obtienne  $n - 1$  bandes de même hauteur  $h = \frac{2}{n-1}$  et on subdivise la frise sur la longueur de telle sorte que l'on obtient une infinité de colonnes de longueur  $h$ . On obtient alors une infinité de cases carrées dans la frise. Soit  $a_{1,0}$  la case contenant la flèche allant du sommet 1 au sommet 2 de la copie 0 et soit  $a_{i,j}$  la case à l'intersection de la  $i^{\text{e}}$  ligne et de la  $j^{\text{e}}$  colonne. Alors, on peut traduire en termes de cases les isométries précédemment présentées : Pour tous  $i, j$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  et  $j \in \mathbb{Z}$ , la frise sera laissée invariante par  $s_g$  si et seulement si  $a_{i,j} = a_{n-i,j}$  et elle sera invariante sous  $r_h$  si et seulement si  $a_{i,j} = a_{n-i,j+1}$ .

**La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n}$** 

Pour  $n = 1$ , la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_2$  est



Il est alors trivial de voir que  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_2$  est dans le groupe de frise  $\langle s_g \rangle$ .

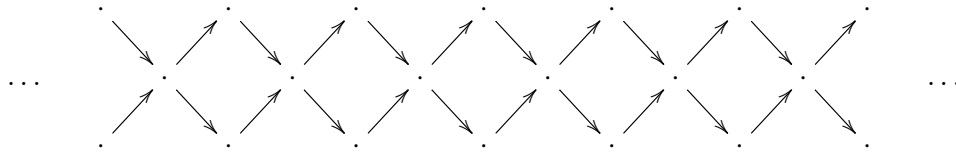
Supposons que la classification soit correcte pour le rang  $n - 1$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n-2}$  soit dans le groupe de frise  $\langle s_g \rangle$ . Considérons la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n}$ . En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a que

$$a_{i,j} = a_{2n-i,j},$$

pour tous  $i, j$  tels que  $i \in \{2, \dots, 2n-2\}$  et  $j \in \mathbb{Z}$ , puisqu'il s'agit de la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n-2}$ . Ainsi, si  $a_{1,j} = a_{2n-1,j}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on aura que la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n}$  se classe dans le groupe de frise  $\langle s_g \rangle$ . Or, puisque le carquois dont est issu la répétition est d'orientation principale, on a que  $a_{1,j} = a_{2n-1,j+2n-2}$  pour tous  $j \in \mathbb{Z}$ . En vertu de la périodicité,  $a_{2n-1,j+2n-2} = a_{2n-1,j+2n-2k}$ . En particulier, en prenant  $k = n$  on obtient que  $a_{1,j} = a_{2n-1,j}$ , ce qui termine la récurrence.

**La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n+1}$** 

Pour  $n = 1$ , la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_3$  est



Cette frise est laissée invariante par  $r_h$ , la répétition a donc pour groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ .

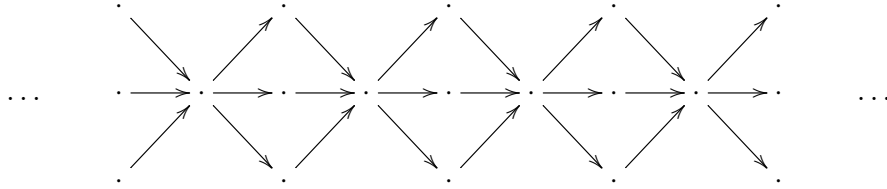
Supposons la classification correcte pour le rang  $n-1$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n-1}$  soit dans le groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ . Considérons la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n+1}$ . En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a que

$$a_{i,j} = a_{2n-i+1,j+1}$$

pour tous  $i, j$  tels que  $i \in \{2, \dots, 2n-1\}$ , car il s'agit de la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n-1}$ . Ainsi, si  $a_{1,j} = a_{2n,j+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on aura que la symétrie glissée laisse la frise invariante, donc la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{2n+1}$  se classe dans le groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ , car la translation est toujours présente en vertu de la périodicité. Or, puisque le carquois dont est issu la répétition est d'orientation principale, on a que  $a_{1,j} = a_{2n,j+2n-1}$  pour tous  $j \in \mathbb{Z}$ . En vertu de la périodicité,  $a_{2n,j+2n-1} = a_{2n,j+2n-1-2k}$ . En particulier, en prenant  $k = n-1$  on obtient que  $a_{1,j} = a_{2n,j+1}$ , ce qui termine la récurrence.

### CAS 2 : La répétition $\mathbb{Z}\mathbb{D}_4$

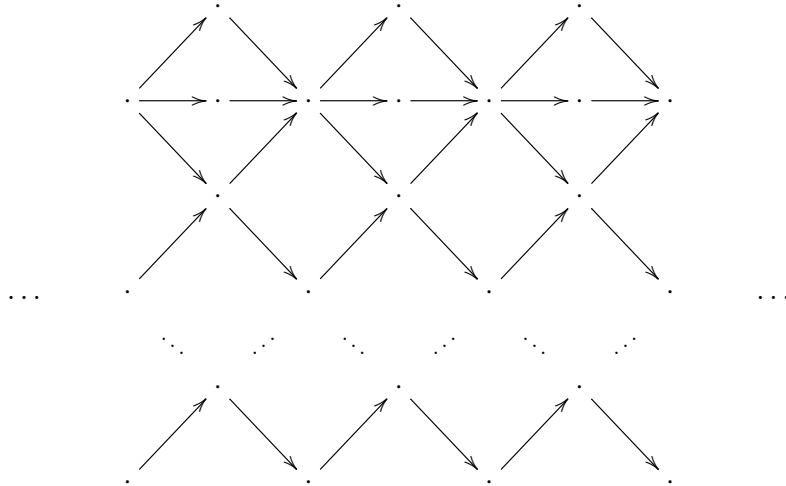
La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{D}_4$  est :



Les seules isométries précédemment définies qui laissent la frise invariante sont  $r_h$  et  $t_L$ . Ainsi, la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{D}_4$  a pour groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ .

### CAS 3 : La répétition $\mathbb{Z}\mathbb{D}_m$

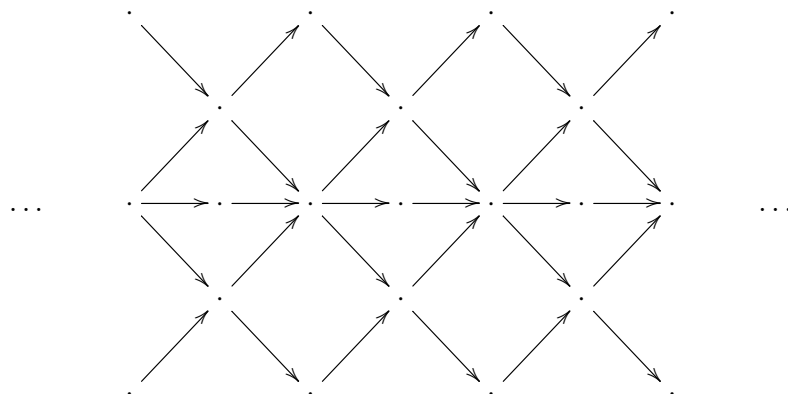
La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{D}_m$ , où  $m > 4$ , est :



Comme la ligne de flèches horizontales n'est présente que dans le haut de la répétition, ni la réflexion horizontale ni la symétrie glissée ne laissent celle-ci inchangée. La répétition a donc pour groupe de frise le groupe  $\langle t_L \rangle$ .

### CAS 4 : La répétition $\mathbb{Z}\mathbb{E}_6$

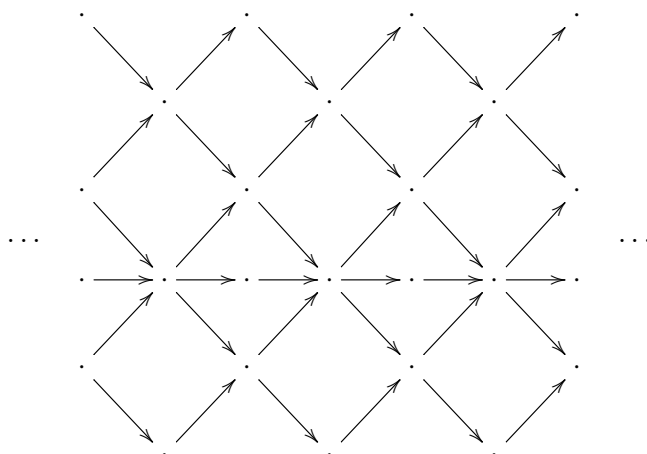
En vertu de la proposition 4.1, la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_6$  est :



Les seules isométries sont  $r_h$  et  $t_L$ . Ainsi,  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_6$  a pour groupe de frise  $\langle t_L, r_h \rangle$ .

### CAS 5 : La répétition $\mathbb{Z}\mathbb{E}_7$

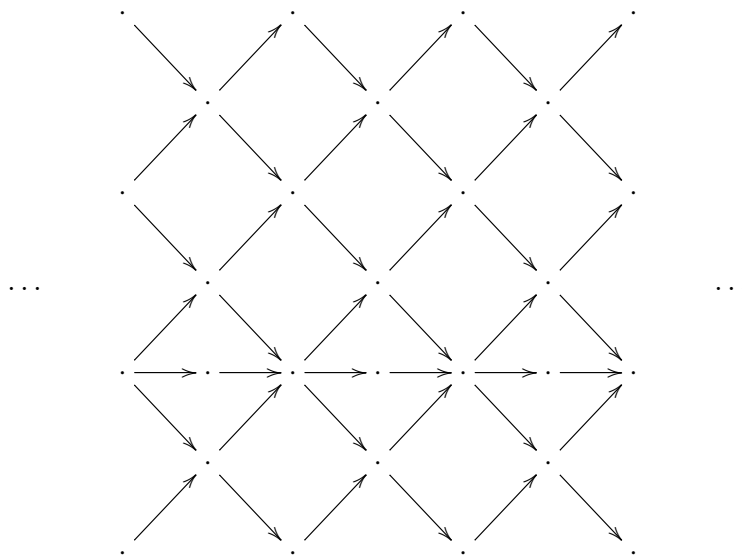
En vertu de la proposition 4.1, la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_7$  est :



La seule isométrie est  $t_L$ . Ainsi,  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_7$  a pour groupe de frise  $\langle t_L \rangle$ .

**CAS 6 : La répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_8$** 

En vertu de la proposition 4.1, la répétition  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_8$  est :



La seule isométrie applicable est  $t_L$ . Ainsi,  $\mathbb{Z}\mathbb{E}_8$  a pour groupe de frise  $\langle t_L \rangle$ .

□

**Références**

- [And95] D. ANDREW : Isometries of the plane. *The American Mathematical Monthly*, 102(7):628–631, 1995.
- [ASS06] I. ASSEM, A. SKOWRONSKI et D. SIMSON : *Elements of representation theory of associative algebras, vol I : Techniques of representation theory*, volume 65 de *London mathematical society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006.
- [FZ02] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, (15(2)):497–529, 2002.
- [FZ03] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras II : Finite type classification. *Invent. Math.*, (154):63–121, 2003.
- [Rie80] C. RIEDTMANN : Algebren, darstellungsköcher, ueberlagerungen and zurück. *Comment. Math. Helvetici*, (55):199–224, 1980.
- [RSA08] C. ROUSSEAU et Y. SAINT-AUBIN : Mathématiques et technologies. *Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology*, pages 45–84, 2008.



DAVID BOULET-ST-JACQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

*Courriel:* `boulet-st-jacques.david@courrier.uqam.ca`

MYRIAM CHABOT

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

*Courriel:* `myriam.chabot@usherbrooke.ca`

GUILLAUME DOUVILLE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

*Courriel:* `guillaume.douville@usherbrooke.ca`